

Метод грамианов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем.

И.Б.ЯДЫКИН, А.В.АХМЕТЗЯНОВ, А.Б.ИСКАКОВ, Д.Е.КАТАЕВ, В.И.ФРОЛОВ

Институт проблем управления РАН им. В.А.Трапезникова,

Научно-технический центр энергетики «ФСК ЕЭС»

Россия

Jad@ipu.ru

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Статическая устойчивость, уравнения Ляпунова, грамианы и субграмианы, резольвента матрицы, тестовая модель Кундура, спектральные разложения

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема определения степени устойчивости электроэнергетической системы и мониторинга локальных или межрайонных колебаний известна в мировой науке более 50 лет и до сих пор не потеряла своей актуальности. Исследования в этой области концентрировались в основном вокруг прямого метода Ляпунова, модального анализа и исследований собственных чисел характеристических уравнений матриц математических моделей ЭЭС. Использовались многие мощные математические методы и их различные комбинации. Перечислим основные методы.

В группе спектральных методов это метод Альберти, метод вычисления доминирующих полюсов спектра, метод матричных сигнум-функций. В группе методов модального анализа это Прони анализ, рекурсивный робастный метод наименьших квадратов, вейвлет анализ, нейронные сети и генетические алгоритмы.

Прямой метод Ляпунова применялся для исследования статической устойчивости ЭЭС в нормальных и аварийных режимах в большинстве работ [1-10]. При этом использовались линеаризованные уравнения возмущенного движения, описывающие поведение ЭЭС при малых отклонениях переменных относительно невозмущенного движения. Обязательным условием для исследования является определение тем или иным способом структуры и параметров математической модели ЭЭС [11,12]. Для методов спектральной группы модель формируется в виде представления в форме пространства состояний для описания заданного уравнениями состояния в классической форме обыкновенных дифференциальных уравнений или в форме дифференциально- алгебраических систем уравнений. Для группы методов модального анализа используются сигналы измерений, полученные в большинстве случаев с помощью современных систем мониторинга переходных режимов СМНР [7-9].

Однако практическое значение всех упомянутых исследований в значительной степени ограничено, в первую очередь из-за того, что математические модели ЭЭС сложны: они нелинейные, нестационарные и распределенные, включают различные описания для медленных и быстрых процессов. Каждый из методов имеет ограниченное применение и эффективен только для определенных режимов системы. Возникают большие проблемы вследствие высокой размерности математических моделей ЭЭС и необходимостью решения задач высокой размерности в реальном времени. В работе [13] в систематической форме изложен подход к исследованию устойчивости линейных непрерывных стационарных динамических систем, основанный на решении матричных уравнений Ляпунова. Ниже излагаются два новых метода решения уравнений Ляпунова, основанные на методе погружения, когда решение алгебраических

уравнений ищется как решение более сложных дифференциальных уравнений, которое с течением времени сходится к решению соответствующих алгебраических уравнений.

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим две линейные непрерывные динамические системы:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= 0, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^d$, $y \in R^d$, x – вектор состояния системы, u – вектор управления, y – вектор выхода, A – матрица динамики, B – матрица входа, C – матрица выхода системы. Будем рассматривать вещественные квадратные матрицы конечных размеров $A_{[n \times n]}$, где n – любые целые положительные числа. Считаем, что системы полностью управляемы и наблюдаемы. Предположим, что выполнено условие $s_k + s_{m\lambda} \neq 0 \quad \forall k=1,2,\dots,n, \quad \forall \lambda=1,2,\dots,r$. Как известно, грамианы управляемости системы (2.1) определяются во временной и частотной областях в виде интеграла Ляпунова [13]:

$$P^c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau, \quad P(\infty) = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau.$$

Аналогичными выражениями определяются грамианы наблюдаемости. Рассмотрим непрерывные дифференциальные и алгебраические уравнения Ляпунова вида:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= AP(t) + P(t)A^T + R, & P(0) &= 0_n, \\ AP(\infty) + P(\infty)A^T + R &= 0. \end{aligned}$$

Требуется найти решения этих уравнений во временной и частотной области.

Как известно, разложение резольвенты матриц имеет вид [14]

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} s^j A_j \cdot N^{-1}(s),$$

где через $N(s)$ обозначен характеристический многочлен матрицы, а через s – комплексная переменная в преобразовании Лапласа:

$$N(s) = \det(Is - A) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = \prod_{k=1}^n (s - s_k), \quad a_n = 1.$$

Матрицы $A_{j[n \times n]}$ называются матрицами Фаддеева, они могут быть найдены как решения линейных алгебраических уравнений вида [14]:

$$A_j = Q_{n-j} V_0, \quad Q = \begin{bmatrix} a_n I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ a_{n-1} I_n & a_n I_n & 0_n & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 I_n & a_2 I_n & \dots & a_n I_n \end{bmatrix},$$

$$U_0 = V_0^T = \text{row} [I_n A A^2 \dots A^{n-1}], \quad U = U_0 B, \\ V = C V_0, Q_{n-j} = \text{row} [a_{n-j-1} I_n \ a_{n-j} I_n \ \dots \ a_n I_n \ 0_n \ \dots \ 0_n].$$

Первый способ решения дифференциального и алгебраического уравнений Ляпунова в частотной и временной областях [15].

$$(2.3) \quad \begin{aligned} P(s) &= L\{P(t)\} = s^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{N'(s_k) N_m(-s_k)} A_j R A_{m\eta} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=1}^r \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j s_{m\lambda}^\eta}{(s_{m\lambda} + s_k) N'(s_k) \frac{dN_m(s-s_k)}{ds} \Big|_{s=s_k+s_{m\lambda}}} \cdot \frac{1}{(s-s_k-s_{m\lambda})} A_j R A_{m\eta}, \\ P(t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{N'(s_k) N_m(-s_k)} A_j R A_{m\eta} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=1}^r \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j s_{m\lambda}^\eta}{(s_{m\lambda} + s_k) N'(s_k) \frac{dN_m(s-s_k)}{ds} \Big|_{s=s_k+s_{m\lambda}}} \cdot A_j R A_{m\eta} e^{(s_k+s_{m\lambda})t}. \end{aligned}$$

Назовем бесконечным субграмианом отдельного корня характеристического многочлена матрицы A выражение

$$P_k^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{N'(s_k) N(-s_k)} A_j B B^T A_j^T$$

В соответствии с этими результатами бесконечный грамиан управляемости определяется в виде

$$P^c = \sum_{k=1}^n P_k^c$$

Второй способ решения алгебраических уравнений Ляпунова в частотной и временной области

Теорема [16]. Рассмотрим линейную полностью управляемую и наблюдаемую непрерывную устойчивую систему вида (2.1). Предположим, что матрица A гурвицева и выполнено условие $s_k + s_\lambda \neq 0 \ \forall k=1,2,\dots,n, \ \forall \lambda=1,2,\dots,n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Бесконечный грамиан управляемости системы является суммой субграмианов

P_k^c , соответствующих вещественным корням и парам комплексно-сопряженных корней

$$(2.4) \quad P^c = \sum_{k=1}^l P_k^c + \sum_{k1=1}^m (P_{k1}^c + P_{k1+1}^c),$$

где индекс $k1+1$ соответствует корню, сопряженному с корнем $k1$;

2. Указанные субграмианы являются матрицами вида:

$$(2.5) \quad P_k^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{r-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{N'(s_k) N(-s_k)} A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$A_{(k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j A_j}{N'(s_k)} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{(s - s_k) \sum_{j=0}^n s_k^j A_j}{N(s)} = \text{Res}(Is - A)^{-1} \Big|_{s=s_k};$$

3. Имеет место соотношение

$$(2.6) \quad P_{k1}^c + P_{k1+1}^c = 2 \text{Re } P_{k1}^c = -2 \text{Re } A_{k1} B B^T (A^T + s_{k1} I)^{-1}$$

для пар комплексно-сопряженных корней.

4. Субграмиан, соответствующий отдельному корню характеристического уравнения, является единственным решением линейного алгебраического уравнения вида

$$(2.7) \quad P_k (s_k I_k + A^T) = -A_{(k)} B B^T.$$

$$(2.8) \quad P_k = -A_{(k)} B B^T (s_k I_k + A^T)^{-1}.$$

3. АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математическая модель ЭЭС описывается нелинейной алгебро-дифференциальной системой уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0, \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) \mathbf{x}(t) &= \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Линеаризованная модель относительно фиксированного режима ЭЭС описывается линейной алгебро-дифференциальной системой уравнений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0, \\ \mathbf{M} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{N} \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Предположим, что матрица $\mathbf{M}$ несингулярная. Тогда система (3.2) может быть переписана как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предположим, что система (3.3) полностью управляема и полностью наблюдаема

Теорема. [16] Пусть линейная непрерывная стационарная динамическая система, описывается уравнением вида (2.1), где матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – вещественные, а матрица $\mathbf{A}$ – гурвицева. Пусть корни s_k характеристического уравнения матрицы $\mathbf{A}$ – простые и выполнено условие $s_k + s_{\lambda} \neq 0, \quad \forall k=1,2,\dots,n, \quad \forall \lambda=1,2,\dots,n$. Тогда имеют место следующие предельные соотношения

i) Если корень s_k характеристического уравнения вещественный и $\operatorname{Re} s_k = \alpha \rightarrow -0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} s_k \rightarrow -0} P^c &\approx \frac{1}{2\alpha} \frac{\mathbf{A}_0 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0^T}{N'(-\alpha)(-s_2) \cdots (-s_n)} \\ (3.4) \end{aligned}$$

ii) если корни $s_k, s_{k+1}, s_k = j\omega_1 - \alpha, s_{k+1} = -j\omega_1 - \alpha$, характеристического уравнения – комплексно-сопряженные и $\operatorname{Re} s_k, s_{k+1} = -\alpha \rightarrow -0$, то

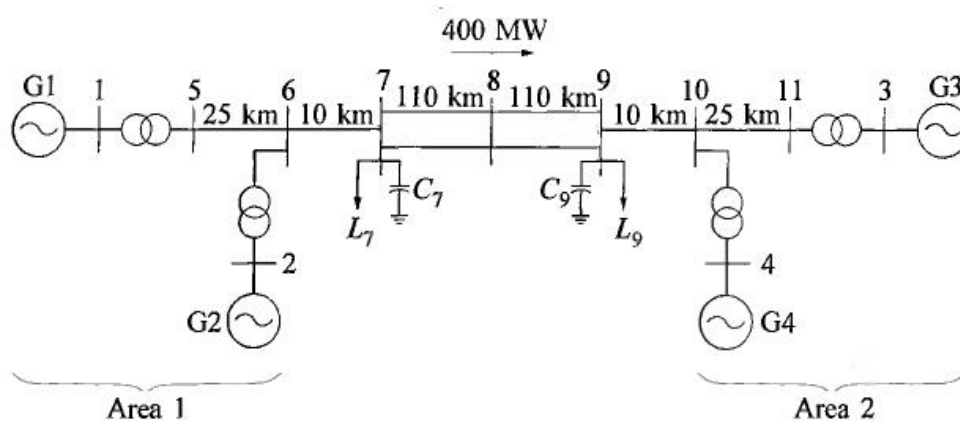
$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} s_k, s_{k+1} \rightarrow -0} P^c &\approx \frac{1}{2\alpha} \operatorname{Re} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{(j\omega_1)^j (-j\omega_1)^\eta \mathbf{A}_j \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_\eta^T}{-N'(j\omega_1) j\omega_1 (-j\omega_1 - s_3) \cdots (-j\omega_1 - s_n)} \right], \\ (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} s_k \rightarrow -0} \|P^c\|_F &= \infty, \\ (3.6) \end{aligned}$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Мы исследовали запасы устойчивости (степень устойчивости по Ляпунову) в системе путем одновременного увеличения всех PL, QL, QC и активных мощностей всех генераторов P_i при сохранении фиксированного соотношения между. Ниже используется обозначение коэффициента увеличения мощности в $\alpha = P/P_0 = Q/Q_0$.

На Рис 1 изображены структурная схема Кундура двух-районной электроэнергетической системы и графики норм Фробениуса грамианов и субграмианов для ряда режимов с различными коэффициентами мощности α .



$X_d = 1.8$	$X_q = 1.7$	$X_l = 0.2$	$X'_d = 0.3$	$X'_q = 0.55$
$X''_d = 0.25$	$X''_q = 0.25$	$R_a = 0.0025$	$T'_{d0} = 8.0 \text{ s}$	$T'_{q0} = 0.4 \text{ s}$
$T''_{d0} = 0.03 \text{ s}$	$T''_{q0} = 0.05 \text{ s}$	$A_{Sat} = 0.015$	$B_{Sat} = 9.6$	$\psi_{T1} = 0.9$
$H = 6.5$ (for G1 and G2)		$H = 6.175$ (for G3 and G4)		$K_D = 0$

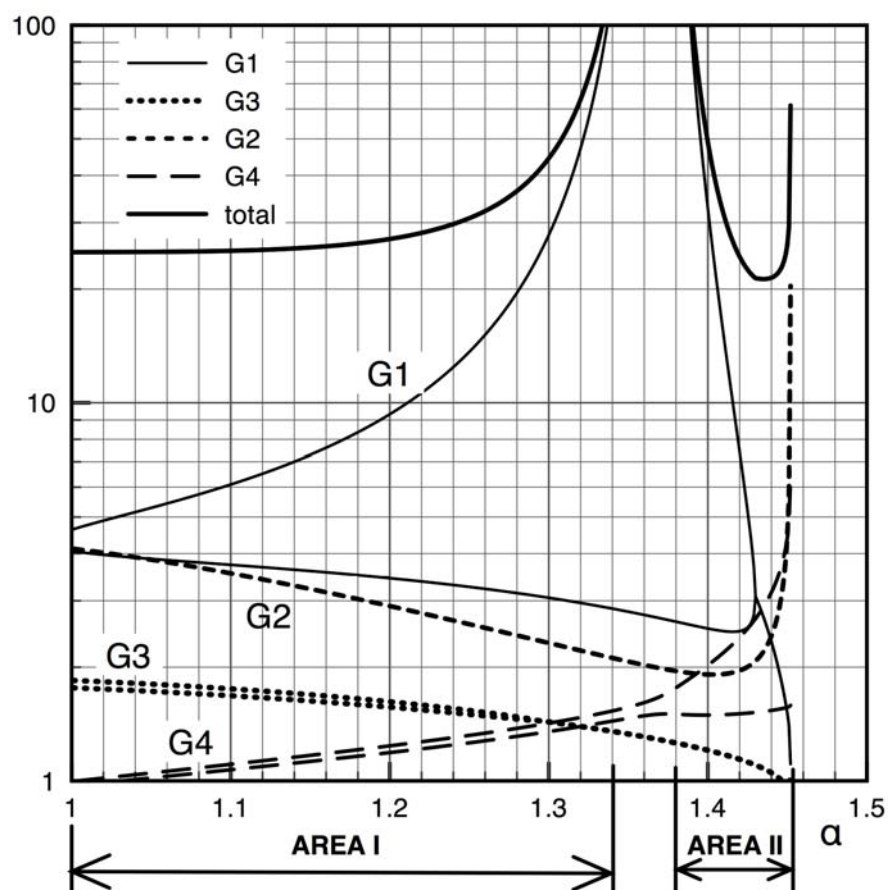


Рис. 1. Структурная схема двух-районной электроэнергетической системы и графики норм Фробениуса грамианов и субграмианов в зависимости от коэффициента увеличения мощности в $\alpha = P/P_0 = Q/Q_0$.

G0 — субграмиан нулевого собственного значения; G1 — субграмиан собственного значения моды межрайонной моды угла ротора; G2 — субграмиан собственного значения моды межрайонной осциллирующей моды угла ротора; G3 — субграмиан собственного значения моды локальной межмашинной связи; G4 — субграмиан собственного значения моды локальных межмашинных колебаний

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важным свойством евклидовой нормы субграмиана и грамиана является стремление нормы к бесконечности при стремлении вещественной части моды к нулю. Указанная норма является оценкой доли энергии отдельной слабоустойчивой моды в общей энергии движения. В режиме функционирования ЭЭС вблизи границы устойчивости указанная норма является оценкой риска достижения ЭЭС границы устойчивости. Соответствующая слабоустойчивая мода соответствует электромеханическим колебаниям группы генераторов. Следовательно, рост нормы субграмиана относительно его значения для нормального режима указывает на нарастание риска потери устойчивости и привязывает эту угрозу к конкретной группе генераторов и конкретному сечению сети. В режиме функционирования ЭЭС вблизи границы устойчивости риск потери устойчивости определяется евклидовой нормой суммы субграмианов слабоустойчивых мод. Взаимовлияние мод характеризуется отрицательной синергией: суммарная энергия группы слабоустойчивых выше, чем сумма энергий отдельно взятых слабоустойчивых мод.

Предложенный подход использования субграмианов может обладать преимуществами по сравнению с другими известными методами. В отличие от подходов, основанных на оценке расстояния критических собственных значений до мнимой оси, он предлагает дополнительный критерий, который имеет физическую интерпретацию энергии. Нормы субграмианов оценивают влияние собственных мод системы на ее общую энергию. Мы также предполагаем, что спектральные свойства грамианов могут оказаться более удобным объектом для задач оптимизации, чем собственные значения системы. По сравнению с измерительными методами предложенный подход не требует измерения внешних сигналов и может использоваться, когда в системе не наблюдаются низкочастотные колебания.

Численный пример для тестовой схемы Кундура из четырех генераторов подтверждает перспективность использования субграмианов для анализа статической устойчивости энергосистемы. В частности, анализ норм субграмианов позволяет идентифицировать неустойчивости локальных механических мод и межрайонных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Баринов В.А., Гамм А.З., Кучеров Ю.Н. и др. Автоматизация диспетчерского управления в энергетике. Под общей редакцией Ю.Н.Руденко и В.А.Семенова. М: изд. МЭИ 2000 г.
- [2] Воропай Н.И. Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. Новосибирск. Наука. Сиб. отд-ние. 1981.
- [3] Аюев Б.И., Жуков А.В. Новые подходы к мониторингу запаса устойчивости электроэнергетических систем. Сборник докладов 3-й международной научно-технической конференции. Энергосистема: управление, конкуренция образование, Екатеринбург, 2008 г.

- [4] Баринов В.А., Совалов С.А. Режимы энергосистем: методы анализа и управления. М.: Энергоатомиздат, 1990.
- [5] P.Kundur. Power Systems Stability and Control. New York: McGraw-Hill.1994.
- [6] В.И.Фролов О задаче статической устойчивости в энергосистемах .Сб. трудов ВНИИЭ Вып 51ю-М:Энергия.1976. С.68-87
- [7] Бушуев В.В., Лизалек Н.Н., Новиков Н.Л. Динамические свойства энергообъединений. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 319 с.
- [8] Шиловский С.В. Закономерности формирования спектров и структур собственных электромеханических колебаний. 2008 //Известия Томского политехнического университета . 2008 . Энергетика . Т. 312, № 4 .С. 80-85.
- [9] Тутундаева Д. В., Фишов А.Г. Развитие технологии контроля и нормирования запасов устойчивости энергосистем // Научный вестник НГТУ, Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – № 2 (43). – С. 146–160.
- [10] E.Gaglioti,A.Iaria,D.Panasetsky,N.Voropai,G.Gianuzzi,A.Gubernali [2011] Inter-area oscillations in GE/ Turkey and IPS/ UPS Power systems CD.Proceedings of SIGRE 2011 Bologna Symposium September 13-15 2011, Bologna, Italy.Electric Power System of Future.Integrating supergrids and microgrids.Pp 276-272.
- [11] Филиппова Н.Г., Тузлукова Е.В. Модальный метод устойчивости энергосистем: новый метод определения собственных значений.//Электричество, 2006, №4,С.5-19.
- [12] Мисриханов М.Ш.,Рябченко В.Н. Матричная сигнум –функция в задачах анализа и синтеза линейных систем// Автоматика и телемеханика.2008.№2.С. 26-51.
- [13] Gajic Z., Qureshi M.T.J. Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control Series Mathematics in Science and Engineering, vol.195. San Diego, CA; London: Academic Press,1995. - 255 pp.
- [14] Hanzon, B., Peeters R.L.M. A Faddeev Sequence Method of Solving Lyapunov and Sylvester Equations. *Linear Algebra Appl.*, 241 -243, pp. 401 – 430.
- [15] Ядыкин И.Б. On Expansion of Gramians and Cross-Gramians of Continuous Control Systems Over Spectra of System Dynamics Matrices / Proceedings of the 18th IFAC World Congress (Milano, Italy). Milano: IFAC, 2011. Volume# 18 | Part# 1. С. 9313-9319.
- [16] Ahmetzyanov.A, Iskakov A.,Grigoryev A., Matinyan A., et al. Gramians method of steady-state stability analysis in large electrical power systems Proceedings of the 8th PP&PSC (Power Plant and Power Systems Control) symposium, 2 – 5 September 2012,Toulouse – France (Paper ID 113). P. 1-6.
- [17] Ядыкин И.Б.,Галяев А.А. О методах вычисления грамианов и их использовании в анализе линейных динамических систем.// Автоматика и телемеханика, №2, 2013, С.53-74.
- [18] Voropai N., Domyshev A., Efimov D.,Panasetsky D., Sukhanov O., Yadykin I.,Hager U.,Babnik T.,Grobovoi A.,Arestova A.,Fortunato V.,Bizumich L.,Sauhats A.Strekovs V., Chuvychin V.,Antonovs D.,Lisalek N.,Balabin N.,Zhong X.P., Report on Protection of Large Scale Power systems Interconnections ICOEUR.Publications.ICOEUR. Deliverables(on-line). Deliverable 4.6.Date of update:17.06.2012. Available from FP7 ICOEUR project #227122 portal: <http://www.icoeur.eu/other/downloads/deliverable/D4.6.pdf>. P. 1-84.